

Pewarnaan Pelangi Antiajaib pada Amalgamasi Graf

R.N Wahidah¹, Dafik^{1,2}, E.R Albirri¹.

¹Mathematics Edu. Depart. University of Jember, Indonesia

²CGANT University of Jember, Indonesia

riniatulnurwahida@gmail.com, d.dafik@unej.ac.id, ermitara@unej.ac.id

Abstract

Let G is a connected graph with vertex set $V(G)$ and edge set $E(G)$. The side weights for $uv \in E(G)$ bijective function $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, |V(G)|\}$ and $w(uv) = f(u) + f(v)$. If each edge has a different weight, the function f is called an antimagic edge point labeling. Is said to be a rainbow path, if a path P on the graph labeled vertex G with every two edges $u'v' \in E(P)$ fulfill $w(uv) \neq w(u'v')$. If for every two vertices $u, v \in V(G)$, their path uv rainbow, f is called the rainbow antimagic labeling of the graph G . Graph G is an antimagic coloring of the rainbow if we for each edge uv weight color side $w(uv)$. The smallest number of colors induced from all sides is the rainbow antimagic connection number G , denoted by $rac(G)$. This study shows the results of the rainbow antimagic connection number from amalgamation graph.

Keywords : *antimagic labeling, rainbow coloring, rainbow antimagic connection number, amalgamation graph.*

1 Pendahuluan

Pada penelitian ini, definisi sebuah graf G merupakan pasangan himpunan $(V(G), E(G))$, dimana $V(G)$ adalah himpunan berhingga tak kosong dari elemen yang disebut titik dan $E(G)$ adalah sebuah himpunan (mungkin kosong) dari pasangan tak berurut (u, v) dari titik-titik $u, v \in V(G)$ disebut sebagai sisi [7]. Teori graf memiliki banyak konsep, salah satunya adalah pewarnaan graf. Chartrand dkk (2009)[2] mengembangkan konsep pewarnaan graf dengan mendefinisikan pewarnaan pelangi pada graf. Misalkan $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, |E(G)|\}$ adalah pewarnaan sisi dari graf terhubung sederhana di mana sisi-sisi yang bertetangga mungkin memiliki warna yang sama. Jika tidak ada dua sisi dari jalur $x - y$ yang berwarna sama, maka jalur tersebut disebut jalur pelangi. Suatu graf G dikatakan hubungan pelangi, jika untuk setiap dua simpul $x, y \in V(G)$ memiliki lintasan $x - y$ pelangi. Pewarnaan tepi G yang memiliki hubungan pelangi disebut pewarnaan pelangi [2]. Salah satu konsep dalam teori graf adalah pelabelan graf. Pelabelan antimagic pada graf G didefinisikan oleh Hartsfield dan Ringel [5]. Suatu graf disebut pelabelan antiajaib jika terdapat fungsi bijeksi $f : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, |E(G)|\}$ sedemikian sehingga semua bobot titiknya berbeda. Bobot titik dari sebuah titik x dan dinotasikan dengan $w(x)$ yang merupakan banyaknya label dari setiap sisi yang berkaitan dengan x , dapat ditulis $w(x) = \sum_{e \in E(x)} f(e)$. Dalam hal ini, f disebut pelabelan antimagic [5].

Dafik dkk. (2019) [3], mengkombinasikan antara pewarnaan pelangi (*rainbow coloring*) dan pelabelan antiajaib (*antimagic labeling*) sehingga menghasilkan topik baru yaitu bilangan koneksi pelangi antiajaib (*rainbow antimagic connection number*). Jika untuk setiap dua titik u dan v dari graf G , terdapat lintasan pelangi uv , maka fungsi f disebut pelabelan pelangi

antiajaib (*rainbow antimagic labeling*) dari graf G . Jika untuk setiap sisi uv dengan warna bobot sisi $w(uv)$, maka dapat dikatakan pewarnaan pelangi antiajaib (*rainbow antimagic coloring*). Bilangan koneksi pelangi antiajaib (*rainbow antimagic connection number*) dinotasikan dengan rac , yaitu mencari jumlah warna paling minimum (paling sedikit) pada sebuah graf.

Adapun penelitian sebelumnya dilakukan oleh Dafik dkk (2019) [3] yang telah meneliti beberapa graf, diantaranya graf lintasan, lingkaran dan bintang. Penelitian yang dilakukan Sulistiyono dkk pada tahun 2020 [4], meneliti pada graf *ladder*, *triangular ladder*, dan *diamond*, sedangkan penelitian oleh Al Jabbar dkk tahun 2020 [6], meneliti graf *book*, *triangular book*. Pada tahun 2021 penelitian dengan topik yang sama dilakukan oleh H S Budi dkk [1]. meneliti graf *lolipop*, *stacked book*, kincir angin belanda, pot bunga dan capung. Dilanjutkan oleh B J Septory dkk pada tahun 2021 yaitu meneliti graf jahangir, *lemon*, *firecracker*, *complete bipartite* dan *double star* [9].

Berikut merupakan Lemma dan Teorema yang digunakan dalam penelitian ini.

Lemma 1. [9] Misalkan G adalah sembarang graf terhubung. Misalkan $rc(G)$ dan $\Delta(G)$ masing-masing memiliki bilangan koneksi pelangi G dan derajat maksimum G , sedemikian sehingga $rac(G) \geq \max\{rc(G), \Delta(G)\}$.

Teorema 1. [4] Misalkan G adalah graf terhubung dengan $diam(G) \leq 2$. Misalkan f merupakan fungsi bijektif dari $V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, |V(G)|\}$, maka terdapat jalur pelangi uv .

2 Hasil Pembahasan

Hasil Pada bagian ini akan dibahas mengenai hasil pembahasan dari bilangan koneksi pelangi antiajaib dari amalgamasi (K_4, v, n) , amalgamasi (W_4, v, n) dan amalgamasi *triangular book* (Tb_v, n) .

Teorema 2 Untuk setiap bilangan bulat $n \geq 3$, bilangan koneksi pelangi antiajaib pada graf amalgamasi (K_4, v, n) adalah

$$rac(amal(K_4, v, n)) = \begin{cases} 3n + 1, & \text{untuk } n = \text{genap} \\ 3n + 2, & \text{untuk } n = \text{ganjil} \end{cases}$$

Bukti. Graf Amalgamasi (K_4, v, n) adalah graf dengan himpunan titik $V(amal(K_4, v, n)) = \{a\} \cup \{x_i, y_i, z_i, 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(amal(K_4, v, n)) = \{ax_i, ay_i, az_i, x_iy_i, x_iz_i, y_iz_i, 1 \leq i \leq n\}$. Kardinalitas dari himpunan sisi dan himpunan titik dari graf amalgamasi (K_4, v, n) berturut-turut adalah $|V(amal(K_4, v, n))| = 3n + 1$ dan $|E(amal(K_4, v, n))| = 6n$. Berdasarkan Teorema 1 diperoleh $rac(amal(K_4, v, n)) \geq \max\{rc(amal(K_4, v, n)), \Delta(amal(K_4, v, n))\} = \Delta(amal(K_4, v, n))$. Selanjutnya untuk menentukan batas atas, dikonstruksi fungsi bijektif $f : V(amal(K_4, v, n)) \rightarrow \{1, 2, \dots, 3n + 1\}$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f(a) &= n + 1, \\ f(x_i) &= n + i + 1, \quad \text{untuk } 1 \leq i \leq n. \\ f(y_i) &= i, \quad \text{untuk } 1 \leq i \leq n. \\ f(z_i) &= 3n - i + 2, \quad \text{untuk } 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Berdasarkan fungsi titik diatas, untuk memperoleh bobot sisi pada graf amalgamasi (K_4, v, n) , diberdakan menjadi 2 kasus, yaitu n genap dan n ganjil.

Kasus.1 n genap

Berikut merupakan fungsi bobot sisi dari graf amalgamasi saat n genap.

Bobot sisi f dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} w(ax_i) &= 2n + i + 2, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n. \\ w(ay_i) &= n + i + 1, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n. \\ w(az_i) &= 4n - i + 3, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n. \\ w(x_iy_i) &= n + 2i + 1, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n. \\ w(x_iz_i) &= 4n + 3 \\ w(y_iz_i) &= 3n + 2 \end{aligned}$$

Selanjutnya menganalisis himpunan bobot sisi yang berbeda. Himpunan $w(x_iy_i)$ merupakan himpunan bagian dari himpunan $w(ax_i)$ dan $w(ay_i)$, sedangkan himpunan $w(y_iz_i)$ merupakan himpunan bagian dari himpunan $w(ax_i)$, sehingga himpunan yang berbeda yaitu $w(ax_i)$, $w(ay_i)$, $w(x_iy_i)$ dan $w(x_iz_i)$. Berikut adalah penjabaran himpunan bobot sisi yang berbeda secara berturut-turut.

$$w(amal(K_4, v, n)) = \{ \underbrace{n + 2, n + 3, n + 4, \dots, 2n + 1}_n, \underbrace{2n + 3, 2n + 4, 2n + 5, \dots, 3n + 2}_n, \underbrace{3n + 3, 3n + 4, 3n + 5, \dots, 4n + 2}_n, \underbrace{4n + 3}_1 \}$$

$$|w(amal(K_4, v, n))| = 3n + 1$$

Pada himpunan bobot sisi tersebut, dapat dilihat bahwa terdapat sebanyak $3n + 1$ jumlah bobot sisi yang berbeda pada saat n bernilai genap.

Kasus.2 n ganjil

Berikut merupakan himpunan bobot sisi dari graf amalgamasi (K_4, V_n) pada saat n ganjil.

Bobot sisi f dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} w(ax_i) &= 2n + i + 2, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n. \\ w(ay_i) &= n + i + 1, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n. \\ w(az_i) &= 4n + 3 - i, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n. \\ w(x_iy_i) &= n + 2i + 1, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n. \\ w(x_iz_i) &= 4n + 3 \\ w(y_iz_i) &= 3n + 2 \\ w(x_{\frac{n+1}{2}}, y_{\frac{n+1}{2}}) &= 2n + 2, & \text{untuk } n = \text{ganjil}. \end{aligned}$$

Selanjutnya menganalisis himpunan bobot sisi yang berbeda. Himpunan $w(x_iy_i)$ merupakan himpunan bagian dari himpunan $w(ax_i)$ dan $w(ay_i)$, sedangkan himpunan $w(y_iz_i)$ merupakan himpunan bagian dari himpunan $w(ax_i)$. Pada saat n ganjil, peneliti menemukan himpunan bobot sisi yang berbeda yaitu pada himpunan $w(x_{\frac{n+1}{2}}y_{\frac{n+1}{2}})$. Sehingga himpunan yang berbeda yaitu $w(ax_i)$, $w(ay_i)$, $w(x_iy_i)$, $w(x_iz_i)$ dan $w(x_{\frac{n+1}{2}}y_{\frac{n+1}{2}})$. Berikut adalah penjabaran himpunan bobot sisi yang berbeda secara berturut-turut.

$$w(amal(K_4, v, n)) = \underbrace{n+2, n+3, n+4, \dots, 2n+1}_n, \underbrace{2n+3, 2n+4, 2n+5, \dots, 3n+2}_n, \\ \underbrace{3n+3, 3n+4, 3n+5, \dots, 4n+2}_n, \underbrace{4n+3}_1, \underbrace{2n+2}_1$$

$$|w(amal(K_4, v, n))| = 3n + 2$$

Berdasarkan himpunan tersebut, dapat dilihat bahwa terdapat sebanyak $3n + 2$ jumlah himpunan bobot sisi yang berbeda pada saat n ganjil.

Dari kasus 1 dan 2, maka diperoleh bilangan koneksi pelangi antiajaib pada graf amalgamasi (K_4, v, n) adalah $rac(amal(K_4, v, n)) = 3n + 1$ untuk n genap dan $rac(amal(K_4, v, n)) = 3n + 2$ untuk n ganjil.

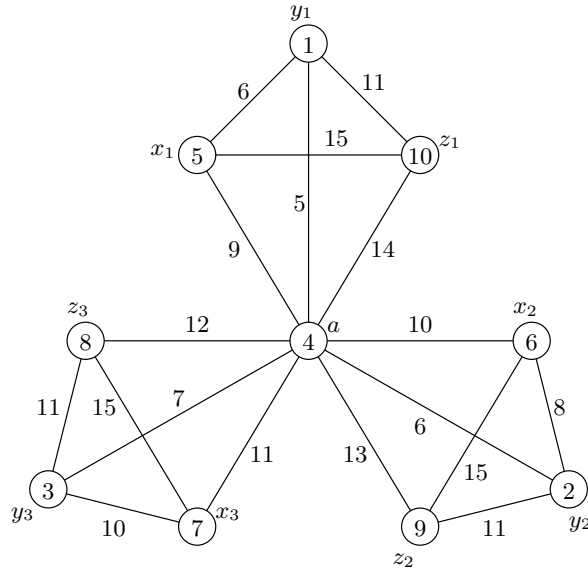


Figure 1: *Rainbow Antimagic Coloring dari Graf Amalgamasi $K_4, v, 3$*

Teorema 3 Untuk setiap bilangan bulat $n \geq 3$, diperoleh bilangan koneksi pelangi antiajaib pada graf amalgamasi (W_4, v, n) adalah

$$rac(amal(W_4, v, n)) = 4n + 2$$

Bukti. Graf Amalgamasi (W_4, v, n) adalah graf dengan himpunan titik $V(amal(W_4, v, n)) = \{x\} \cup \{y_{i,j}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 4\}$ dan himpunan sisi $E(amal(W_4, v, n)) = \{xy_{ij}, y_{i,j}y_{i,j+1}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 4\}$. Kardinalitas dari himpunan sisi dan himpunan titik dari graf amalgamasi (W_4, v, n) berturut-turut adalah $|V(amal(W_4, v, n))| = 4n+1$ dan $|E(amal(W_4, v, n))| = 8n$. Berdasarkan Teorema 1 diperoleh $rac(amal(W_4, v, n)) \geq \max\{rc(amal(W_4, v, n)), \Delta(amal(W_4, v, n))\} = \Delta(amal(W_4, v, n))$. Selanjutnya untuk menentukan batas atas, dikonstruksi fungsi bijektif $f : V(amal(W_4, v, n)) \rightarrow \{1, 2, \dots, 4n+1\}$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
f(x) &= 4n + 1, \\
f(y_{i,j}) &= nj - n + i, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n, j = \text{ganjil} \\
f(y_{i,j}) &= nj - i + 1, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n, j = \text{genap}
\end{aligned}$$

Berdasarkan fungsi titik diatas, untuk memperoleh bobot sisi pada graf amalgamasi (W_4, v, n) adalah sebagai berikut.

Bobot sisi f dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
w(xy_{i,j}) &= 3n + nj + i + 1, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n, j=\text{ganjil} \\
w(xy_{i,j}) &= 4n + nj - i + 2, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n, j=\text{genap} \\
w(y_{i,1}, y_{i,2}) &= 2n + 1, \\
w(y_{i,2}, y_{i,3}) &= 4n + 1, \\
w(y_{i,3}, y_{i,4}) &= 6n + 1, \\
w(y_{i,1}, y_{i,4}) &= w(y_{i,2}, y_{i,3}) = 4n + 1
\end{aligned}$$

Selanjutnya menganalisi himpunan bobot yang berbeda. Himpunan $w(y_{i,3}y_{i,4})$ merupakan himpunan bagian dari himpunan $w(xy_{i,2})$ dan himpunan $w(y_{i,1}, y_{i,4})$ merupakan himpunan bagian dari himpunan $w(y_{i,1}, y_{i,2})$, sehingga himpunan bobot sisi yang berbeda yaitu himpunan $w(xy_{i,1}), w(xy_{i,2}), w(xy_{i,3}), w(xy_{i,4}), w(y_{i,1}, y_{i,2}), w(y_{i,2}, y_{i,3})$. Berikut adalah penjabaran himpunan bobot sisi yang berbeda.

$$\begin{aligned}
w(\text{amal}(W_4, v, n)) &= \{ \underbrace{4n + 2, 4n + 3, 4n + 4, \dots, 5n + 1}_{n}, \underbrace{6n + 1, 6n, 6n - 1, \dots, 5n + 2}_{n}, \\
&\quad \underbrace{6n + 2, 6n + 3, 6n + 4, \dots, 7n + 1}_{n}, \underbrace{9n + 1, 8n, 8n - 1, \dots, 7n + 2}_{n}, \underbrace{2n + 1}_{1}, \underbrace{4n + 1}_{1} \}
\end{aligned}$$

$$|w(\text{amal}(W_4, v, n))| = 4n + 2$$

Pada himpunan bobot sisi tersebut, dapat dilihat bahwa terdapat sebanyak $4n + 2$ jumlah bobot sisi yang berbeda, maka diperoleh bilangan koneksi pelangi antiajaib pada graf amalgamasi (W_4, v, n) adalah $\text{rac}(\text{amal}(W_4, v, n)) = 4n + 2$.

Teorema 4 Untuk setiap bilangan bulat $n \geq 3$, bilangan koneksi pelangi antiajaib pada graf amalgamasi (Tb_3, v, n) adalah

$$\text{rac}(\text{amal}(Tb_3, v, n)) = 4n + 1$$

Bukti. Graf Amalgamasi *Triagular Book* (Tb_3, v, n) adalah graf dengan himpunan titik $V(\text{amal}(Tb_3, v, n)) = \{x\} \cup \{y_i, z_{i,j}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 3\}$ dan himpunan sisi $E(\text{amal}(Tb_3, v, n)) = \{xy_i, xz_{i,j}, z_iy_{i,j}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 3\}$. Kardinalitas dari himpunan sisi dan himpunan titik dari graf amalgamasi *Triagular Book* (Tb_3, v, n) berturut-turut adalah $|V(\text{amal}(Tb_3, v, n))| = 4n + 1$ dan $|E(\text{amal}(Tb_3, v, n))| = 7n$. Berdasarkan Teorema 1 diperoleh $\text{rac}(\text{amal}(Tb_3, v, n)) \geq \max\{\text{rc}(\text{amal}(Tb_3, v, n)), \Delta(\text{amal}(Tb_3, v, n))\} = \Delta(\text{amal}(Tb_3, v, n))$. Selanjutnya untuk menentukan batas atas, dikonstruksi fungsi bijektif $f : V(\text{amal}(Tb_3, v, n)) \rightarrow \{1, 2, \dots, n + 3\}$ sebagai

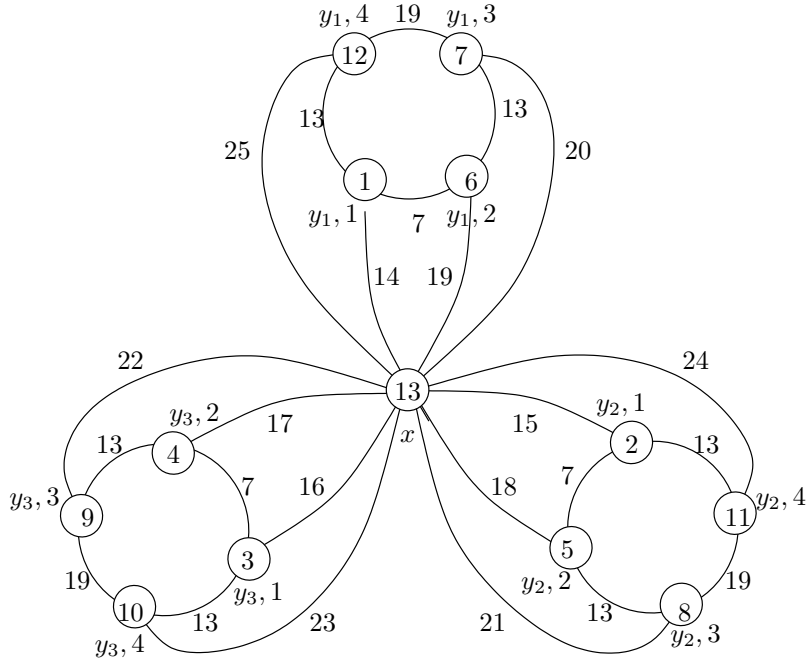


Figure 2: *Rainbow Antimagic Coloring dari Graf Amalgamasi $W_4, v, 3$*

berikut.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= n + 1, \\
 f(y_i) &= i, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f(z_{i,j=1}) &= 4n - i + 2, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f(z_{i,j=2}) &= 2n + i + 1, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f(z_{i,j=3}) &= 2n - i + 2, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n
 \end{aligned}$$

Berdasarkan fungsi titik diatas, untuk memperoleh bobot sisi pada graf amalgamasi (Tb_3, v, n) adalah sebagai berikut.

Bobot sisi f dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 w(xy_i) &= n + i + 1, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\
 w(xz_{i,j=1}) &= 5n - i + 3, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\
 w(xz_{i,j=2}) &= 3n + i + 2, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\
 w(xz_{i,j=3}) &= 3n - i + 3, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\
 w(y_iz_{i,j=1}) &= 4n + 2, \\
 w(y_iz_{i,j=2}) &= 2n + 2i + 2, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\
 w(y_iz_{i,j=3}) &= 2n + 2
 \end{aligned}$$

Selanjutnya menganalisis himpunan bobot sisi yang berbeda. Himpunan $w(y_iz_{i,2})$ merupakan himpunan bagian dari himpunan $w(xz_{i,2})$ dan $w(xz_{i,3})$, sedangkan himpunan $w(y_iz_{i,1})$

merupakan himpunan bagian dari himpunan $w(xz_{i,2})$. Sehingga himpunan bobot sisi yang berbeda yaitu himpunan $w(xy_i)$, $w(xz_{i,1})$, $w(xz_{i,2})$, $w(xz_{i,3})$ dan $w(y_iz_{i,3})$. Berikut adalah penjabaran himpunan bobot sisi yang berbeda secara berturut-turut.

$$w(amal(Tb_3, v, n)) = \{ \underbrace{n+2, n+3, n+4, \dots, 2n+1}_n, \underbrace{5n+2, 5n+1, 5n, \dots, 4n+3}_n, \underbrace{3n+3, 3n+4, 3n+5, \dots, 4n+2}_n, \underbrace{3n+2, 3n+1, 3n, \dots, 2n+3}_n, \underbrace{2n+2}_1 \}$$

$$|w(amal(Tb_3, v, n))| = 3n + 1$$

Pada himpunan bobot sisi tersebut, dapat dilihat bahwa terdapat sebanyak $4n + 1$ jumlah bobot sisi yang berbeda, maka diperoleh bilangan koneksi pelangi antiajaib pada graf amalgamasi (Tb_3, v, n) adalah $rac(amal(Tb_3, v, n)) = 4n + 1$.

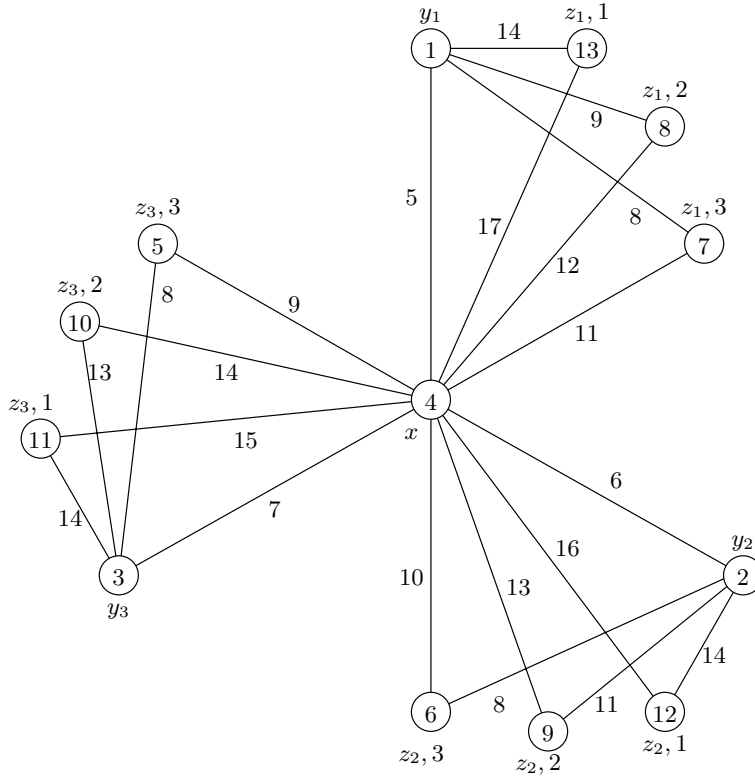


Figure 3: *Rainbow Antimagic Coloring dari Graf Amalgamasi $Tb_3, v, 3$*

3 Kesimpulan

Berdasarkan hasil tersebut, penulis mendapatkan hasil bilangan koneksi anti sihir pelangi pada beberapa graf amalgamasi. Penulis menemukan nilai bilangan koneksi pelangi antiajaib dari amalgamasi K_4, v, n diperoleh $rac(amal(K_4, v, n)) = 3n + 1$ dengan $n = \text{genap}$ dan $rac(amal(K_4, v, n)) = 3n + 2$ dengan $n = \text{ganjil}$, untuk amalgamasi W_4, v, n diperoleh $rac(amal(W_4, v, n)) = 4n + 2$, sedangkan pada graf amalgamasi *triangular book* Tb_3, v, n diperoleh $rac(amal(Tb_3, v, n)) = 4n + 1$.

4 Ucapan Terimakasih

Kami mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada CGANT (*Combinatorics, Graph Theory and Networks Topologi*) - Research Group Universitas Jember, serta atas dukungan hingga terselesaikannya artikel ini.

References

- [1] Budi, H. S., Tirta, I. M., Agustin, I. H., Kristiana, A. I. 2021. rainbow antimagic coloring of graphs.
- [2] Chartrand, G, and Zhang, P. 2009. *Chromatic Graph Theory*. New York: Crc Press Company; 2009.
- [3] Dafik, Alfarisi, R., dan Agustin, I. H. 2019. *On Rainbow Edge Antimagic Connection Number of Graphs*. Journal of Physics , 1-5.
- [4] Dafik, Susanto F, Alfarisi R, Septory B J, Agustin I H, Venkatachalam M. 2021. On rainbow antimagic coloring of graphs. *Advanced Mathematical Models and Application*. **6** (3) 278-291.
- [5] Hartsfield N, Ringel G, *Pearls in Graph Theory*, Academic Press, San Diego, 1990.
- [6] Jabbar, Z. L. Al, Adawiyah, R., Albirri, E. R., Agustin, I. H. 2020. *On rainbow antimagic coloring of some special graph*.
- [7] Slamin. 2009. *Desain Jaringan Pendekatan Teori Graf*. Jember. Universitas Jember.
- [8] Sulistiyono, B., Slamin, Dafik, Agustin, I. H., Alfarisi, R. 2020. On rainbow antimagic coloring of some graphs. *Journal of Physics: Conference Series*, 1465(1).
- [9] Septory B J, Utoyo M I, Dafik, Sulistiyono B, Agustin I H. 2021. On rainbow antimagic coloring of special graphs. *Journal of Physics: Conference Series*. **1836** 012016.